جامعة الإسكندرية
كلية الآداب
قسم الفلسفة

الملتقى العلمي الثالث لطلاب الدراسات العليا

بحث بعنوان

التصور الرياضي الفلسفي لمفهوم اللا تناهي عند جورج كانتور

The Mathematico – Philosophico Concept of The Infinite: The Case of G. Cantor

الطالب: عباس محمد عباس عبد الجليل خليفة
الدرجة: باحث دكتوراه
التخصص: المنطق وفلسفة العلوم

إشراف

الأستاذ الدكتور/ ماهر عبد القادر محمد علي
أستاذ المنطق وفلسفة العلوم بكلية الآداب جامعة الإسكندرية
وعميد كلية السياحة والفنادق الأسبق

ملخص باللغة العربية:

اللا تناهي مفهوم يدل على الأشياء التي لا حدود لها أو لا نهاية لها، أو ما يتجاوز الحدود الطبيعية للعدّ. وقد تناول الفلاسفة طبيعة فكرة اللا تناهي: مثل زينون الإيلي الذي عبر عنها من خلال مفارقاته، أو حججه، التي اشتملت منذ القدم على هذا التصور، وكذلك العديد من الفلاسفة اللذين جاءوا من بعده من أمثال أرسطو وفي العصر الحديث كانت الفكرة موضع عناية كانط.

ومن الناحية الرياضية: فنجد أنه في الرياضيات المعاصرة يتم استخدام مفهوم اللا تناهي، في العديد من الإشكاليات النظرية مثل الحساب ونظرية المجموعات، وقد تم استخدام هذا المفهوم أيضاً في الفيزياء وفي بعض العلوم الأخرى .

ويعتبر جورج كانتور (١٨٤٥-١٩١٨) أهم من تناول الفكرة في سياق جديد منذ النصف الثاني من القرن التاسع عشر: فنجد أن نظرية المجموعات اللا متناهية عنده ، تمثل واحدة من أهم صور الإبداع والاختلاف في تاريخ الرياضيات، وذلك من خلال دراسته لمفاهيم الاتصال واللا تناهي، حيث استطاع استخدام هذا المفهوم، وهو ما أبرز وجهة نظر غير تقليدية لهذا التصور.

ملخص باللغة الانجليزية:

Infinity is a concept describing something without any bound or larger than any natural number. Philosophers have speculated about the nature of the infinite, for example Zeno of Elea, who proposed many paradoxes involving infinity and the others Philosophers such as: Aristotle, Kant,....

In Mathematics: Modern mathematics uses the general concept of infinity in the solution of many practical and theoretical problems, such as in calculus and set theory. The idea is also used in physics and the other sciences.

Georg Cantor (1845 –1918), the creator of transfinite set theory, is one of the most imaginative and controversial figures in the history of mathematics. Toward the end of the nineteenth century his study of continuity and the infinite eventually forced him to depart radically from standard interpretations and use of infinity in mathematics. Because his views were unorthodox.

مقدمة

تشير كلمة Infinite ،Infinity إلى كل ما هو لا نهائي، عدد لا يحصى، لانهاية، لا متناه ،... اللانهاية مفهوم ذهني مجرد لا يشير إلى ما هو ملموس أو حسي، إنما لكل ما هو في حالة دائمة من التغير و الصيرورة، وعدم الاكتمال...ومن هنا تكمن الصعوبة في تعريف اللا تناهي لأنه ليس له حدود أو قيود معينة يمكن من خلالها تحديد بدايته أو نهايته، فإذا كانت له حدود معينة أصبح اللا تناهي تناهياً .

وفي هذه الدراسة نحاول أن نتوصل لبعض المحاور والنتائج الهامة فيما يتعلق بمفهوم اللا تناهي بأشكاله المختلفة، وأهميته في الجانبين: الفلسفي والرياضي، إذ كانت له أصول فلسفية واضحة – جدير بالذكر أن معظم الفلاسفة يستخدمون مصطلح " اللا متناهي وليس اللا تناهي، وذلك على العكس من المناطقة والرياضيين اللذين يستخدمون مصطلح اللا تناهي– فنجد أن الأصول الفلسفية لهذه الإشكالية لها عمقاً شديداً بدايةً من ديمقريطس الذي ذهب إلى أن العالم يتألف من عدد لا نهائي من الذرات، فضلاً عن زينون الإيلي ومفهومه عن الحركة، كما نحاول تحليل مفهوم اللاتناهي عند أرسطو وتأكيده على أن اللاتناهي موجود بالقوة وغير موجود بالفعل، ليسلك اتجاهاً ميتافيزيقياً شأنه شأن العديد من الفلاسفة اللذين لحقوا به في العصور الحديثة من أمثال اسبينوزا .

وكذلك كان هناك دور واضح لبعض فلاسفة العصر الحديث من أمثال ديكارت وكانط، اللذين واصلوا فكرة المفهوم الفلسفي للا تناهي، وهو ما سوف نحاول التعرف عليه و التوصل إليه، من خلال دراسة الأسس الفلسفية الأولى لذلك التصور.

أما من الناحية الرياضية: فنجد أن هذه الفكرة قد أرقت العديد من الرياضيين كما أرقت الفلاسفة منذ زمن بعيد، فنجد مثلاً أن الأعداد اللا متناهية لم تحظ لدى الرياضيين بالدراسة والاهتمام الكافيين إلا في وقت متأخر حيث كانت تعتبر أوهاماً ليس لها أي نوع من أنواع الوجود، إلاأن مشكلة اللانهاية فرضت نفسها وبقوة على الرياضيين حين وجدوا أنه من المستحيل تجنبها في مسار اكتشافاتهم الرياضية وخاصة اللا متناهيات في الصغر

حيث تم اكتشاف أكثر من طريقة لحساب اللا نهايات في الصغر، على يد كل من نيوتن وليبتنز، من خلال دراسة الكميات التي تتناقص باستمرار ودون توقف إلى ما حدّ له، أو الزيادات اللانهائية الصغر التي يمر بها متغير خلال القيم المتتابعة التي تعطى له.ومن الجدير ذكره أن كلاً من نيوتن وليبتنز توصلا إلى حساب اللا نهايات في الصغر أو علم التفاضل والتكامل في وقت واحد تقريباً، ولكن باعتماد منهجين مختلفين لكل منهما حيث إن نيوتن قد توصل إلى هذا التصور بوسائل علم الحركة الفيزيائي وكانت المشتقات عنده تشير إلى التسارع أما ليبنتز فقد توصل إليه بطرق رياضية سنتطرق إليها تفصيلاً .

أما عن جورج كانتور، وموقفه من مفهوم اللا تناهي، فإننا نجد أن كانتور قد استطاع أن ينظم ويهذب مفهوم اللا تناهي وربأ به عن كل التصورات الدينية أو الميتافيزيقية التي كانت سائدة حول هذا المفهوم، وهو ما جعل معالجة كانتور لفكرة اللا تناهي تكتسب أهمية خاصة جعلتها تشكل علامة فارقة في تاريخ معالجة هذه القضية، حيث نجد أن الفارق في تناول فكرة اللا تناهي عبر العصور وبين تناول كانتور لها هو الفارق بين الجدل الفلسفي الذي يحلل أفكاراً غامضة والمعالجة الرياضية التي تعالج أعداداً على أساس عمليات حسابية، حيث انطلق كانتور في هذه المعالجة من معالجته لقضية الأعداد والحساب الخاص بطبيعة نظرية الأعداد وتصور كانتور المختلف لهذه النظرية(١) .

ولقد جاءت نظرية المجموعات تدعيما للمذهب الحسابي الرياضي، والمنطقي اللوجستيقي في الوقت ذاته، وذلك من خلال اتجاهين بارزين هما:

---

[1] للمزيد من التوضيح في هذه النقطة: راجع:

•**Joseph, Warren (1990):," Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the infinite", Princeton University Press, PP 120–149.**

انظر أيضاً: محمد ثابت الفندي (١٩٦٩): "فلسفة الرياضة"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان ، ص ص ١١٠–١٢٠.

أولاً: تأكيدها على الأساس الذي تقوم عليه الرياضيات بأكملها، بما فيها الهندسة، على الأعداد الطبيعية. حيث تمثل إسهاما بارزا في معالجتها لمتسلسلات النقاط أو الأعداد اللا متناهية التي حيرت الرياضيين طويلا.

ثانياً: جعلها نقطة التقاء واضحة بين المنطق والرياضيات، حيث تدعم المفهوم الذي دافع عنه كل من"راسل" و "وايتهد" بإمكانية رد الرياضيات بأكملها إلى المنطق على اعتبار أن نظرية المجموعات جزء لا يتجزأ من المنطق في الأساس كما أنها نظرية هامة في الحساب الرياضي.

هذا ويمكن القول بأن قيمة وأهمية نظرية المجموعات بالنسبة لأصحابها والقائلين بها تعادل قيمة نظرية "العدد" عند الفيثاغوريين فكما كان العدد هو جوهر الوجود والأشياء هند الفيثاغوريين، فقد أصبحت "المجموعة" هي جوهر الوجود ككل وأصل الأشياء جميعاً.

إشكالية الدراسة:

تمثل تلك الدراسة أحد الجوانب الهامة التي تبين مدى تعدد واختلاف الأنساق التي تحدد طبيعة الأساس الذي تقوم عليه الرياضيات، فكما نعلم جيداً أن الاتجاه اللوجستيقي قد حاول رد الرياضيات بأسرها إلى المنطق، نجد هذا الاتجاه " اللا تناهي " يحاول تفسير الأسس التي قامت عليها الرياضيات، لذا تعد هذه النظرية التي ارتبطت بأكثر من نظرية أخرى في الرياضيات تمثل أهمية كبرى في تاريخ الرياضيات المعاصرة، ويمكن تحديد إشكال رئيس لتلك الدراسة وهو: إلى أي مدى أصبح اللا تناهي يمثل الركيزة الأساسية في الرياضيات المعاصرة، وخاصةً عند كانتور؟ وكيف انتقل هذا المفهوم من المنظور الفلسفي الميتافيزيقي إلى المنظور الرياضي المجرد ؟؟

تساؤلات الدراسة:

من أهم التساؤلات التي تحاول أن تجيب عنها تلك الدراسة ما يلي:

- ما الجذور الفلسفية التي قام عليها مفهوم اللا تناهي الرياضي؟

- كيف أثرت تلك الجذور في صياغة النظريات الرياضية التي ارتبطت بمفهوم اللا تناهي؟
- هل كان هناك تناول رياضي لمفهوم اللا تناهي قبل كانتور، وإلى أي مدي تأثر كانتور بهذه التناولات والمعالجات؟
- ما طبيعة نظرية المجموعات عند كانتور، وما علاقتها بنظرية الأعداد، وعلاقتهما معاً بمفهوم اللا تناهي؟
- ما موقف الفلاسفة والرياضيين المعاصرين لكانتور واللاحقين عليه من هذا التصور؟
- ما موقف رسل من هذا المفهوم ككل، وما طبيعة الاتصال واللا تناهي عند رسل؟

محاور الدراسة:

سنحاول في تلك الدراسة أن نتطرق إلى عناصر أو أفكار مُحددة، تقوم عليها تلك الدراسة كلكل، وذلك من خلال تقسيمها إلى محاور تقوم على التطور الذي لحق بفكرة اللا تناهي من التصور الفلسفي الأوّلي، إلى موقف المؤيدين والمعارضين، ثم إلى التصور الرياضي، وموقف الرياضيين منها، ودور كانتور والسابقين له واللاحقين عليه من مفهوم اللا تناهي بشكل عام، وذلك وفقاً للترتيب التالي:

أولاً: اللا تناهي من الناحية الفلسفية:

في التصور الفلسفي للا تناهي، هناك العديد من الفاسفة اللذين كان لهم باعاً طويلاً في هذا الاتجاه، إلا أن القليل منهم من نستطع القول عنه بأنه كان ممهداً للمفهوم الرياضي للا تناهي، لذا سوف نكتفي بالبحث في ثلاثة فلاسفة، كل منهم يمثل عصر مختلف وتوجه مختلف عن الآخر، وهم " زينون الإيلي، وأرسطو، وكانط"

زينون الإيلي:

يعد أول من أشار إلى أن مفهوم اللا تناهي هو زينون الإيلي في القرن الخامس قبل الميلاد [١]، وذلك في إطار تقديمه مجموعة من الحجج والبراهين الفلسفية لإثبات أنه لا يوجد أي تغير وأن الحركة وهم طبقًا لمذهب أستاذه بارمينيدس الفيلسوف الإغريقي. أي أن زينون الإيلي لم تكن فكرة اللا تناهي لديه هي فكرة لقيام مذهب أو نسق فلسفي، وإنما كان تناوله لها في إطار الدفاع عن فكرة الثبات والوحدة التي يقول بها أستاذه بارمنيدس، وتدور المفارقات التسع التي وصلتنا منه حول نقطة مركزية هي التقسيم اللانهائي للزمان والمكان . وهناك نوعين من المفارقات التي أشار إليها زينون وهي مفارقات خاصة بالحركة، وأخرى خاصة بالتعدد . أي أن ما يرمى إليه زينون هو تأكيد فكرة أن المكان كل واحد ثابت لا يتجزأ وبالتالي الكون كتلة صماء ثابتة لا تتجزأ، وهذا هو مذهب برمنيدس في الوجود . ويعتمد زينون اعتماداً أساسياً على فكرة اللانهاية في حجته ضد الحركة معتبراً أنه لما كانت المسافة قابلة للقسمة بشكل لا متناه، كانت الحركة التي تجتاز هذا اللامتناهي غير ممكنة، فالمتحرك عندما يريد أن ينتقل من نقطة **A** إلى نقطة أخرى **B** يجب أن يقطع نصف المسافة، ولكي يصل إلى النصف يجب عليه أن يقطع نصف النصف..... وهكذا[2].

ولقد أظهر زينون فى حججه الكثير من المسائل الهامة مثل:

مسألة التغير والصيرورة	.مسألة الوجود وخصائصه.
مسألة الحركة والزمن	.مسألة الكل وعلاقته بأجزائه.

مسألة الاتصال والانفصال.

---

[1] صلاح عثمان(٢٠٠٠): "مشكلات فلسفة العلم: الاتصال واللا تناهي بين العلم والفلسفة" ، منشأة المعارف ، الإسكندريه، ص ١١٥.

[2] صلاح عثمان (٢٠٠٤): "مفارقات زينون: جدل الثبات والحركة من منظور رياضي معاصر"، بحث منشور في كلية الآداب، جامعة المنوفية، عدد٥٨، ص ص ٩٩ – ١٣٩.

أرسطو:

حاول أرسطو أن يأخذ موقفًا وسطًا بين رافضي فكرة اللا تناهي وبين المقتنعين بها، وهي ما تعتبر أول خطوة فلسفية في إيضاح مفهوم اللا تنناهي، بالتمييز بين مفهومين مختلفين من اللا تناهي: اللا تناهي الفعلي واللا تناهي المحتملة[1]. فاللا تناهي الفعلي هو اللا تناهي كشيء محدد، مكتمل ويتألف من عدد لا نهائي من العناصر، فهو اللانهاية التي توجد كليًا ككيان في وقت واحد.

وعلى النقيض من ذلك، قال أرسطو إن فكرة اللا تناهي المحتمل "بالقوة" أو اللانهاية المحتملة هي اللانهاية كعملية لا تنتهي أبدًا، ولكنها محدودة في أي وقت معين. وهي تظهر في صور كثيرة، على سبيل المثال عند تقسيم خط بالنصف إلى مالانهاية . وتظهر أيضًا عند عدِّ الأرقام؛ فليس هناك حد محدود عند العد لأنك تستطيع دائمًا إضافة واحد آخر. وعلَّلَ أرسطو جميع التناقضات التي تظهر عند التفكير في اللانهاية، إلى استعمال المفهوم المتناقض للانهاية الفعلية، بدلًا من المفهوم المتسق للانهاية المحتملة.

كانط:

أما عند كانط فنجد أنه قد فصّل في البحث في هذا الأمر حيث يعتقد كانط أن البشر كائنات متناهية (لها نهاية وتنتهي) تعيش في عالم لا متناهي وقد وضح ذلك من خلال قضيتين مهمتين، ويعتبرهما كانط أنهما متناقضتين وهما[2]:

القضية الأولى: وفي تلك القضية يرى كانط أن للعالم بداية في الزمان وهو أيضا محصور بحدود المكان، ويقيم كانط الدليل على صحة القضية بطريقة نقض الفرض فإذا لم يكن

---

1 تدهوتدرتش: "دليل أكسفورد للفلسفة" ، ج ٣ ، ترجمة نجيب الحصادي (٢٠٠٣) ، مراجعة عبد القادر الطلحي، المكتب الوطني للبحث والتطوير، ليبيا ، ص ٨١٥.

2 كانط: "نقض العقل المحض"، ترجمة: موسى وهبة، مركز الإنماء القومي، بيروت ، لبنان، ص ص ٢٢٧-٢٣٠.

للعالم بداية كانت كل لحظة من لحظات الزمن مسبوقة بزمان غير متناه وهذا تناقض لأن معنى اللانهاية في الزمان أن هناك سلسلة لا تتم أبدا، إذا بداية العالم شرط ضروري لوجوده، أما الشق الثاني من القضية يبرهن عليه كانط باعتبار العالم معطى كلي لا يمكن أن يكون لا متناهي في أجزائه لأنه عندئذ لا يمكن الإحاطة به .

القضية الثانية: وهي عكس الأولى ليس للعالم بداية ولا حدود في المكان بل هو لا متناه بالنظر إلى أن الزمان أم إلى المكان لأنه لو كان للعالم بداية لكان تقدمها زمان وفي هذا الزمان تتساوى إمكانية وجود العالم من عدمه فلم يكن العالم ليوجد ولو كان للعالم حد لكان هذا الحد هو الفراغ وبالتالي لم يكن العالم محدودا إذا ليس للعالم بداية ولا حدود فهو لا متناهي [1]، ويعد كانط ابرز الفلاسفة اللذين اهتموا بمفهوم اللا تناهي من الناحية الفلسفية .

ثانياً: مفهوم اللا تناهي الرياضي قبل كانتور:

يُعرف اللا تناهي في الرياضيات – على وجه الخصوص- باللا متناهي المجرد أي الذي يكون بعيداً عن أي توجهات ميتافيزيقية أو دينية أو حتى حسية، وعندما نتناول اللامتناهي الرياضي لابد لنا من أن نميز بين اللا متناهي في الصغر وهو: هو عدد أو مقدار مع ليس صفر أو مادون الصفر، ولكنه أصغر من أي عدد أو مقدار متناهي أو مقدار نستطيع تحديد نهايته الصغرى، أما اللا متناهي في الكبر فهو هو الأكبر من كل عدد يمكن تحديد نهايته، وقبل أن نتناول مفهوم اللا تناهي عند كانتور لا بد من عرض هذا المفهوم عند بعض الرياضيين السابقين على كانتور.

---

[1] محمود فهمي زيدان(١٩٧٩): "كانط وفلسفته النظرية " ، ط٣، دار المعارف بمصر، ص ص ٢٩٧- ٣٠٣.

١- اللا متناهي الفلسفي والرياضي عند ليبنتز(١٦٤٦-١٧١٦):

يعد ليبنتز من أوائل الفلاسفة والرياضيين اللذين بحثوا مفهوم اللا تناهي الرياضي، حيث كتب ليبنتز عام ١٩٦٣ " إنني ميال كثيراً إلى فكرة اللا نهائية الحقيقية، لذاأعتقد بأن ليس هناك جزء من المادة غير قابل للانقسام، ولكن يمكن تقسيمه فعلاً..." كما نجد أن ليبنتز قد تناول اللا تناهي في الصغر من ناحية الحساب الرياضي، ومن ناحية أخرى ذهب إلى تحليل اللا متناهي الفلسفي أيضاً، حيث يقر ليبنتز بنوعين من اللا تناهي وهما:

أ- اللامتناهي الأنطولوجي عند ليبنتز:

هو مرتبط بالإله وصفاته، ولانهاية الإله مرتبطة بكماله وهذا ما أثبته ديكارت.الإله هوالكائن الكامل الذي لا حدود له من ثم لا نهاية له،إنه" الموجود اللا متناهي وليس يوجد فيه ولا خارجا عنه ما يحد من ماهيته [1]: أما فيه فصفات لا متناهية... وأما خارجا عنه فلا يوجد شيء مكافئ له. وفكرة الله لا تتضمن تناقضا" ولهذا فاللا متناهي هو لا متناهي فعلي لأنه يتجلى في عالم الظواهر الطبيعية لا في العدد أو العقل الإنساني، هذا العالم الذي هو عدد لا متناهي من المونادات كل منها يختلف عن الآخر، ولما كان من وجود سبب كافي لكل ما هو كائن على نحو ما هو كائن لا على نحو آخر، فإن الله هو سبب كافي لها، وإذا كان كذلك فإن خيريته وقوته اللا متناهيتان تقتضيان أن يكون العالم محتوي على عدد أكبر من الكائنات المتنوعة كيفا، والمتوافقة مع بعضها،المترابطة فيما بينها فكل جزء من العالم يحتوي على عدد لا متناهي من الكائنات المتنوعة والمنسجمة، وهي المونادات التي تؤلف متسلسلة لا متناهية شبيهة بمتسلسلة عددية والتي فيها كل عدد يختلف عن الآخر .

[1] يوسف كرم: "تاريخ الفلسفة الحديثة"، دار المعارف، القاهرة، (دت) ط ،٥ص١٣٧

ب- اللا متناهي الرياضي عند ليبنتز:

في الحقيقة أنه يمكن القول بأن اللانهاية الفعلية تظهر في الهندسة والأعداد. فأي خط هو جسم هندسي يتكون من عدد لانهائي من النقاط؛ أي أنه شيء محدد مكتمل ويتألف من عدد لا نهائي من العناصر، فهو اللانهاية التي توجد كليًا ككيان في وقت واحد، ولهذا فأي خط هو لانهاية فعلية. أيضًا نجد أن أي سلسلة أعداد مجتمعة، كالأعداد الطبيعية مثلًا، تشكل لانهاية فعلية. كما قال الرياضي ديفيد هيلبرت في ورقته العلمية عن اللانهائي: "اللانهاية لا تزال تظهر في سلاسل الأعداد اللانهائية والتي تعرف بسلسلة الأعداد الحقيقية، وفي مفهوم نظام الأعداد الحقيقية، والذي ننظر إليه ككيان مكتمل موجود في وقتٍ واحد، عندما نعطي خاصية معينة لجميع الأعداد الحقيقية". وهو ما ظهر بوضوح في النصف الثاني من القرن السابع عشر، بعد اكتشاف نيوتن وليبنتز لحساب التفاضل والتكامل القائم على مفهوم الكميات اللانهائية الصغر.هو مرتبط بالحساب اللا متناهي في الصغر و يرتكز أساسا على المواضيع اللا متناهية ويتميز باستعمال المتتاليات اللا متناهية، إلا أن موقف ليبنتز هنا كان قد أكد على وجود اللا متناهي الممكن "أي اللا تناهي بالقوة" أي أنه قد تأثر بموقف أرسطو في هذه النقطة، وبذلك نلاحظ أن ليبنتزلم يستطع أن يخرج نفسه من دائرة أرسطو فيما يتعلق بكل مباحث المنطق والرياضيات، وقد كان ذلك واضحاً في تبشيره بعلم جديد وهو "المنطق الرياضي" الذي كان متقيداً فيه بأحكام أرسطو إلى أقصى درجة.

٢- اللا متناهي الفعلي عند برنارد بولزانو(١٧٨١-١٨٤٨)

كان بولزانو يحاول إثبات وجود اللا متناهي الفعلي في الحساب، وبذلك فهو يمثل فاتحة جديدة فيما يتعلق بهذا التصور، يرى بولزانو أن فكرة اللا نهائية فكرة مجردة من السلب، وذلك لأنها فكرة خرجت من الكثرة نفسها، وفي ذلك فهو يقول: " إننا نضع اللا نهائية كنقيض للنهائية نفسها "، ومن الناحية الدينية حيث يذهب بولزانو أن الإله ليس لا متناهيا إلا لأننا نتصوره حاملا لقدرات كل منها لها مقدار لا متناهي، وبالرغم أنه ليس

الأول الذي أشار إلى وجود اللا متناهي الفعلي، وليس الأول الذي أدرك إمكانية وجود عدد من اللا متناهيات اللا متساوية، وليس الأول الذي قام بربط مساواة اللا متناهيين بإمكانية تأسيس رابطة التقابل واحد بواحد بين عناصر المجموعتين، لكنه الأول الذي حاول بناء تصور رياضي خالص وحساب نسقي لللا متناهي الفعلي ، وبذلك نجد أن بولزانو قد أكد الآراء السابقة عنه، فيما يخص وجود اللا متناهي الفعلي وأقر أيضاً بوجود عدد من اللا متناهيات، وأنه لا يمكن أن نثبت وجود مجموعتين لا متناهيتيين متساويتين إلا من خلال التقابل بين عناصرهما، ولكن توصل إلى الجديد المتمثل في حساب اللامتناهي ورأى أن بناء هذا التصور" يكون حسب التوازي الدقيق بين المتناهي واللا متناهي، وقد أشار بولزانو إلى اللا تناهي في المجموعات أيضاً ولكنه لم يفصل في ذلك، وذلك حينما عندما أجرى تقابلاً بين مجموعة الأعداد الطبيعية ...١,٢,٣ ومجموعة الأعداد الزوجية...٢,٤,٦، ومن هذا المنطلق يعرف بولزانو اللانهاية بالقول: ((اللانهائية هي تلك التي تكون قادرة على أن تخضع لعلاقة التطابق واحد– إلى – وهذا هو ما قام كانتور بتفصيله بعد ذلك [1] .

ثالثاً: مفهوم اللا تناهي عند كانتور وعلاقته بنظرية المجموعات:

يعتبر الرياضي الألماني جورج كانتور المؤسس الفعلي لنظرية المجموعات، ويرى بعض المؤرخين أن ما دفع كانتور لإدخال نظرية المجموعات في الرياضيات قد يكون مردّ ذلك توجه كانتور نفسه نحو الفلسفة ودراسته للا نهايات بصورة خاصة، ومن ناحية أخرى بسبب توجهه نحو تحليل نظرية الأعداد وتفرقته بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الحقيقية [2]، هذا و تعتبر نظرية المجموعات **Set theory** من الاكتشافات الهامة في تاريخ الرياضيات ، حيث أنها تعتبر من أهم المنعرجات الحاسمة في تاريخ الفكر

---

[1] محمد ثابت الفندي (١٩٦٩): "فلسفة الرياضة"، المرجع نفسه ، ص ص ١١١–١١٢.

[2] صلاح عثمان (٢٠٠٠): "مشكلات فلسفة العلم: الاتصال واللا تناهي بين العلم والفلسفة" ، المرجع نفسه، ص ١١٦.

الرياضي وتطوره، وهذا ما جعل الرياضي الألماني ديفيد هيلبرت (١٨٦٢-١٩٤٣) حيث يقول عنها " إنها الجنة التي خلقها كانتور فى العالم الرياضي" أو بمعنى آخر لن يخرجنا أحد من الجنة التي أوجدها كانتور لنا . ويعرف كانتور المجموعة بأنها: تعني تجمعاً في وحدة تامة لأشياء واضحة عن طريق لإدراك الحسي أو العقلي، هذه الوحدة تفترض وجود رابطة أو صفة مشتركة بين عناصر المجموعة. في حياتنا اليومية كل كلمة تدل على تجمع تعبر عن مجموعة مثل الكلمات الآتية: أسرة ،فريق، أمة، مدرسة،....،وتنطلق نظرية المجموعات من ثلاث حدود أولية لا معرفة هي (المجموعة،والعنصر، والانتماء إلى)

والجدير بالذكر أن كل من الفصل **Class** أو الفئة والمجموعة **Set** يعبران عن نفس المعنى أو المضمون، حيث إن الفئة **Class** هي مفهوم أساسى ورد في كتابات علماء المنطق، أما كلمة المجموعة **set** فهو مفهوم مماثل ورد في كتابات علماء الرياضيات، وكلمة فئة أو مجموعة تشير إلى نفس المعنى، وهي المجموعة المكونة من أعضاء مع ضرورة اشتراك الأعضاء في صفة معلومة معروفة واحدة، ومن المعروف أن جورج بول **G. Boole** كان أول من اهتم بمعالجة حساب الفئات وله يرجع الفضل في اكتشاف ما عرف بجبر الفئات، فقد قدم بيان مفصل عن الفئات أوضح من خلاله أن الفئة ما هي إلا مجموعة أو عدد من الأشياء يجمعها صفات مماثلة أو متشابهة، وعبر عنها باستخدام الرموز الجبرية، أما عند كانتور، فإننا نجد أن من أهم المفاهيم الأساسية لنظرية المجموعات عند كانتور " الأعداد الأصلية ، الأعداد الترتيبية ، المجموعة الفارغة ، المجموعة الفرعية ، الاتحاد ، المتناهي ، اللا متناهي ، ...".

وقد انطلق كانتور في نظريته من مبدأ التناظر (واحد – واحد)، حيث يعتبر كانتور أن أي مجموعتين لا متناهيتين يكونان متساويتين فقط في حالة أن خضوعهما لقاعدة المطابقة أو التناظر[1]، وفيما عدا ذلك فإن المجموعتين لا بد أن تكونا عناصر

[1] برتراند رسل (١٩٠٣): "أصول الرياضيات" ، الجزء الرابع , ترجمة: محمد مرسي أحمد،أحمد فؤاد الأهواني, (١٩٥٨) دار المعارف بمصر، ص ٢٢٢.

إحداهما أكبر أو أصغر من عناصر الأخرى. ومن المعروف أن موضوع نظرية المجموعات عند كانتور هو المجموعات اللا نهائية، وقد ربط كانتور نظرية المجموعات باللا تناهي معاً من خلال فكرة الأعداد وربما كان ذلك يعد من براعة كانتور التي لا يتميز بها الكثيرين من الرياضيين أن مجموعة الأعداد الطبيعية ,١,٢,٣....... هي مجموعة لا متناهية وكذلك مجموعة الأعداد الصحيحة......-٣,-٢,-١, ٠, ١,٢,٣,..... و هذا يعني أنّه يمكن استخدام طريقة التناظر بين المجموعتين – التي قال بها بولزانو ولكن لم يطبقها بشكل واضح – أي أننا يمكننا أن نسير في إقامة علاقة واحد بواحد إلى ما لانهاية له الأمر الذي يعني أن هناك من الأعداد الطبيعية بقدر ما هناك من الأعداد الصحيحة على الرغم من أن هذه ضعف تلك وبعبارة آخرى فالمجموعتان متساويتان من حيث عدد العناصر على الرغم من أنَّ الثانية تحوي ضعف الأولى من حيث عدد العناصر أو الأعداد نفسها فالمجموعة الأولى " الأعداد الطبيعية لا تشتمل على السوالب – ومن هنا كان انطلاق كانتور نحو نظريته في اللا تناهي . هذا وقد عالج كانتور مفهوماً آخر – في إطار تناوله للا تناهي – وهو مفهوم الأعداد الموغلة أو المتجاوزة أو اللا متناهية **Transfinite Numbers** ، وهذه الأعداد هي التي تكون سلسلة العناصر فيها متناظرة إلى ما لا نهاية أي كل عنصر " عدد " يقابله آخر أي لها نفس الخاصية اللا نهائية التي يفترضها كانتور في التقابل بين سلسلة الأعداد الطبيعية والأعداد الحقيقية، والأعداد المتجاوزة أو اللا متناهية أو الموغلة تختلف عن الأعداد الطبيعية.

رابعاً: مفهوم اللا تناهي بعد كانتور:

لم تتوقف فكرة اللا تناهي عند ما وصل إليه وأقره كانتور، ولكنها شهدت العديد من التطورات، ما بين من أدخل مفاهيم جديدة، وما بين من حاول تعديل النظرية الكانتورية ذاتها، ولعل التطور الأبرز هو ما جاء به الرياضي الألماني اللاحق على كانتور وهو (إرنست زيرميلو **Ernst Zermelo1871-1953**)

لقد عرض " زيرميلو " نظريته في مقال نشر سنة 1908 بعنوان "دراسات حول أسس نظرية المجموعات"، وكان هدفه مفهوم المجموعة بشكل بديهي أو أكسيوماتيكي حيث لا يمكن أن نفتح أي مجال لوجود مفارقات، فأكسمة نظرية المجموعات بدايتها كان من خلال إعداد ميدان المواضيع المجردة التي هي عبارة عن أشياء a, b, c ويمكن اعتبارها حينئذ كأفراد أو عناصر لمجموعة معينة، أي الموضوعات المجردة التي تتألف منها أي مجموعة [1] .

لذا وجدنا زيرميلو يعرف نظرية المجموعات بأنها: " فرع من الرياضيات والتي مهمتها دراسة التصورات الأساسية رياضيا: العدد، الترتيب، دالة... ومن هنا جاءت فكرة تطوير الأسس المنطقية للحساب والتحليل، ومن هنا جاءت العلاقة بين المنطق والرياضيات في نظرية المجموعات، وذلك من خلال عاملين اثنين هما: شرح الأسس المنطقية للعمليات الرياضية مثل العدد، والدوال، والمتناهيات واللامتناهيات،... ومن ناحية أخرى فكرة البدهنة أو الأكسمة التي أرادها زيرميلو، وهي فكرة منطقية أصيلة، تلك الأكسمة التي ترتكز على النظرية الأصلية المؤسسة، التي تستخلص العلاقات الأساسية، وتربط بين علاقات الانتماء والاتحاد والتعدي وغيرها. وذلك بهدف التخلص من فكرة المفارقات أو التناقضات أو ....

ولهذا فإن زرمولو يؤكد أنه لإبعاد وإقصاء التناقضات، يجب حصر العمليات التي تثير الشكوك، مع الحفاظ على ما هو هام وأساسي في هذه النظرية، أي الحفاظ على العلاقات الأساسية في النظرية . لذا نجد أن زيرميلو يلخص نظرية المجموعات عند كانتور في مجموعة من تعاريف و٧ بديهيات فقط، أما ما عداها فقد تخلى عنها لأنها تؤدي إلى

---

[1] عبد اللطيف الصديقي (١٩٩٩): "مسألة اللا نهائية في الرياضيات: نظرية جورج كانتور"، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان ، الأردن، ص ص ٧٥-٧٦.

الوقوع في التناقض . أي أنه كان يريدها نسقاً متكاملاً، مثل النسق الاستنباطي الذي ينطلق من بديهيات وتعريفات ومسلمات [1]

خامساً: موقف رسل من مفهوم اللا تناهي عند كانتور:

من أهم الرياضيين اللذين اشتمل عليهم رسل بالبحث والتحليلي في كتابيه " أصول الرياضيات، ومقدمة لفلسفة الرياضة " هو كانتور، حيث تناول رسل مفهوم اللا تناهي عنده حيث يمكن القول بشكل عام أن رسل كان مؤيدا لكانتور في هذا التصور بشكل عام، حيث يقول رسل مادحاً ومبجلاً: " بأنها أعظم الإنجازات التي يفتخر بها العصر "، إلا أنه بعد التحليل والفحص لمبرهنات كانتور قد وجد رسل أنها تشتمل على بعض المفارقات، ومن هنا نجمت العديد من المفارقات التي تتعلق بتصور كانتور عن تصوره وعن تناوله للأعداد الحقيقية والطبيعية، وكان رسل أحد اللذين عرضوا لتلك المفارقات، فعندما كان يتأمل برهان كانتور الذي يثبت فيه أنه ليس ثمة عدد أصلى أكبر من سائر الأعداد ، وعلى حسب اعتقاد رسل فإنه يرى أن هناك عدد ما في العالم من أشياء كافة لابد أن يكون هو أكبر عدد ممكن ، وبتطبيق برهان كانتور على هذا العدد توصل رسل إلى فكرة الفئة Class حيث رأى أن الفئة تكون أحيانا – ولا تكون أحيانا أخرى– عضوا لنفسها [2].

و هذا ما دفع رسل إلى التساؤل عن هذا النوع من الفئات، وهل هذه الفئة عضوا لذاتها أم أنها ليست كذلك؟ بمعنى أخر هل الفئة التي تحتوي على كل الفئات التيلاا تنتمي لنفسها تنتمي لنفسها والفئة عبارة عن مجموعة جميع الموضوعات التي لها خصائص مشتركة واحدة، مثل فئة الإنسان تضم جميع الناس الذين يشتركون في صفات وخصائص واحدة كالتفكير والنطق والإحساس وغيرها من الصفات الأساسية الخاصة بالجنس البشرى.

---

[1] ماهر عبد القادر(١٩٨٥): "المنطق الرياضي , " دار النهضة العربية للطباعة والنشر, بيروت , لبنان، ص ٩٢.

[2] برتراند رسل:" مقدمة للفلسفة الرياضية" ، ترجمة: محمد مرسي أحمد، أحمد فؤاد الأهواني (١٩٨٠) ، مؤسسة سجل العرب ، ص ١٩٨.

كما يرى رسل أن الفئة يمكن تحليلها إلى ما هو أبسط منها وهى الأعضاء التي منها تتكون الفئة.

ومن هنا فقد تناول رسل بالبحث والدراسة مفاهيم الأعداد الحقيقية والأعداد المنطقة واللا منطقة واللا نهائي في الكبر واللا نهائي في الصغر وترابط المتسلسلات والتعريف بالاتصال وطبيعته، وغيرها من المفاهيم الرياضية التي ترتبط بهذا التصور في الجزء الخامس من كتابه أصول الرياضيات، ونوه إلى موقفه من براهين كانتور في كتابه " فلسفتي كيف تطورت " .

سادساً: المفارقات الناجمة عن مفهوم اللا تناهي وموقف بعض الرياضيين والفلاسفة منه:

من الناحية الفلسفية نجد أنه كان هناك رفضاً من قبل العديد من الفلاسفة لمفهوم اللا تناهي، فنجد أن أرسطو قد رفض مفهوم اللا نهائية الكاملة أو الحقيقية، واعتبرها موجودة بالفعل أو خارج الأذهان، وكذلك اللاهوتيين ورجال الدين المسيحي أنذاك رفضوا مفهوم اللا تناهي، واعتبروه تحدياً لوحدة الله المطلقة واللا نهائية، وكذلك الرياضيين كان هناك البعض له نفس الموقف من اللا تناهي عند كانتور من أمثال كرونكر وغيره ، وقد نجم عن تلك المواقف بعض المفارقات فضلاً عن مفارقة رسل التي أشرنا إليها مثل مفارقة بورالي – فورتى والمرتبطة في أسمها باسم المنطقي والرياضي الإيطالي (بورالي – فورتى Burali–Forti ١٨٦١–١٩٣١) أولى المفارقات التي اعتمدت في ظهورها على تحليل نظرية المجموعات الكانتورية[1] ، فضلاً عن غيرها من المواقف والمفارقات التي وضحها العديد من الرياضيين والفلاسفة بشأن تلك النظرية أو المفهوم الجديد الذي طغي على الدراسات والأبحاث الرياضية آنذاك، ولكن ذلك لا يعني أنه ليس هناك من مؤيدين لنظرية كانتور، بل على العكس هناك العديد من الرياضيين والمناطقة من آمنوا بمفهوم

[1] تدهوتدرتش: "دليل أكسفورد للفلسفة" ، ج ٣، المرجع نفسه، ص ٧٦٩ .
انظر ايضاً: محمد ثابت الفندي (١٩٦٩): "فلسفة الرياضة"، المرجع نفسه ، ص ١١٤.

كانتور، بل واعتبروه الأساس الذي يجب أن تُبنى عليه الرياضيات المعاصرة بأسرها من أمثال الرياضي الألماني هيلبرت ، وغيره.

ومن هنا نجد أن أي نظرية جديدة تظهر على الساحة العلمية بشكل عام لا بد أن يظهر من يؤيدها ويناصرها، وكذلك من يعارضها ويعتبرها أنها دخيلة على المفاهيم والأصول التراثية التي نشأ العلماء ووعرفوها وتعلموا من خلالها، وهذا ما سنحاول عرضه وتناوله بشيء من التفصيل والتوضيح في تلك الدراسة من خلال تناولنا لمفهوم اللا تناهي الرياضي وأصوله الفلسفية، وطبيعة هذا المفهوم عند كانتور، وكيف استطاع تطبيقه، وكذلك أهم المواقف والإسهامات والتطورات التي لحقت بهذا المفهوم الجديد.

قائمة المراجع:

- أندريه لالاند": **موسوعة لالاند الفلسفية"،** ترجمة: خليل أحمد خليل، إشراف: أحمد عويدات (٢٠٠٨)، دار عويدات للنشر والترجمة والطباعة , بيروت , لبنان.
- برتراند رسل (١٩٠٣): "**أصول الرياضيات**" ، الجزء الأول , ترجمة: محمد مرسي أحمد، أحمد فؤاد الأهواني, (١٩٥٨) دار المعارف بمصر.
- برتراند رسل: "**مقدمة للفلسفة الرياضية**" ، ترجمة: محمد مرسي أحمد، أحمد فؤاد الأهواني (١٩٨٠) ، مؤسسة سجل العرب.
- تدهوتدرتش: "**دليل أكسفورد للفلسفة**" ، ج ٣ ، ترجمة نجيب الحصادي (٢٠٠٣) ، مراجعة عبد القادر الطلحي، المكتب الوطني للبحث والتطوير، ليبيا.
- زبيدة بن ميسي (٢٠١٧): "**الرياضيات بنظرة فلسفية على خطى كافاييس**"، دار ألفا للوثائق.
- صلاح عثمان(٢٠٠٠): "**مشكلات فلسفة العلم: الاتصال واللا تناهي بين العلم والفلسفة**"، منشأة المعارف، الإسكندرية .
- كانط:" **نقد العقل الخالص**"، ترجمة موسى وهبه، (١٩٩٨) مركز الإنماء القومي ، بيروت، لبنان.
- ماهر عبد القادر(١٩٨٥): "**المنطق الرياضي**"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان.
- محمد ثابت الفندي (١٩٦٩): "**فلسفة الرياضة**"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، لبنان.

- محمد فتحي عبدالله (١٩٩٥): " **الجدل بين أرسطو وكانط (دراسة مقارنة**")، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت.
- محمود فهمي زيدان(١٩٧٩): "**كانط وفلسفته النظرية**"، ط٣، دار المعارف بمصر.
- يوسف كرم (١٩٦٦): "**تاريخ الفلسفة اليونانية**"، ط ٥ ، لجنة التأليف والترجمة والنشر، مكتبة نهضة مصر، القاهرة.
- Joseph, Warren (1990):, "**Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the infinite**", Princeton University Press.